15. Нормално уравнение на права в равнината

Дефиниция.1: Всеки вектор, който е перпендикулярен на дадена права(т.е. перпендикулярен на всички вектори, които са колинеарни с правата) се нарича нормален вектор на правата.

Ще смятаме, че сме фиксирали опртонормирана координатна система $K = Oxy$, т.е. ще работим в равнината.

Твърдение.1: Нека правата l има уравнение $l : Ax + By + C = 0$. Тогава векторът $N(A, B)$ е нормален за l.
Доказателство:
Ако $N(A, B)$ е нормален вектор на правата l, то тогава N е перпендикулярен, на който и да е вектор ν, колинеарен на правата.
Знаем, че $\nu(-B, A)$ е колинеарен на l и също така ν е ненулев, защото $(A, B) \neq 0$.
Следователно имаме от скаларното произведение на N и ν:

$$< N, \nu >= A(-B) + AB = 0,$$

т.е. N е перпендикулярен на ν и N е нормален верктор на l.

Твърдение.2: Правата l, която минава през т.$P(x_0, y_0)$ и е перпендикулярна на ненулевия вектор $N(A, B)$ има уравнение:

$$l : A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (1)$$

Доказателство:
Тъй като $P \in l$ и $N \perp l$, то тези условия еднозначно определят правата l.
Нека m е права с уравнение $m : A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$(това е общо уравнение на права, защото $(A, B) \neq 0$ и $N \neq 0$). $P \in m$, тъй като $A(x_0 - x_0) + B(y_0 - y_0) = 0$ и от Тв.1 следва, че $N(A, B) \perp m$. Следователно $m \equiv l$.

Очевидно всички нормални вектори на дадена права l са колинеарни. Ако $N(A, B) \neq 0$ е нормален за l, то единичните вектори $n = \dfrac{N}{|N|}$ и $-n(N(\dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}))$ са единични нормални вектори за правата l и те са единствени.

Дефиниция.2: Общо уравнение на правата l спрямо K, в което нормалният вектор с координати коефициентите пред x и y е единичен се нарича нормално уравнение на l спрямо K.
Следователно ако $l : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ е уравнение на правата l, то това уравнение е нормално, тогава и само тогава, когато $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Твърдение.3: Всяка права l в равнината има точно две нормални уравнения. При това, ако $Ax + Bx + C = 0$ е произволно общо уравнение на l, то нормалните уравнения са $\dfrac{Ax + Bx + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$ и $-\dfrac{Ax + Bx + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$.
Доказателство:
Нека $l : Ax + By + C = 0$. Тогава произволно общо уравнение на l ще има вида:

$$l : \lambda(Ax + By + C) = 0, \tag{2}$$

където $\lambda \neq 0$, т.е.

$$l : \lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0. \tag{3}$$

Това е нормално уравнение, тогава и само тогава, когато $(\lambda A)^2 + (\lambda B)^2 = 1$, т.е. $\lambda^2(A^2 + B^2) = 1$. От тук получаваме

$$\lambda = +\tfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Следователно l има точно две уравнения и те са уравненията от условията.

Разстояние от точка до права. Твърдение.4: Нека g е произволна права от равнината с нормално уравнение $g : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ и $P(x_0, y_0)$ е произволна точка. Означаваме $l(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$. Тогава разстоянието $d(P, g)$ от P до правата g е равно на $|l(x_0, y_0)|$.
Доказатлство:
Нека n е единичният нормален вектор на правата g, т.е. $n(\alpha, \beta)$. Нека m е правата през т.P, която е перпендикулярна на g и $Q = m \cap g$. Тогава $d(P, g) = |\overrightarrow{PQ}|$.
Имаме, че $Q \in m$ и $m \parallel n$, следователно $|\overrightarrow{PQ}| = \lambda n$.
Нека т.Q има координати (x_1, y_1), следователно

$$x_0 - x_1 = \lambda\alpha,\ y_0 - y_1 = \lambda\beta,$$
$$x_1 = x_0 - \lambda\alpha,\ y_1 = y_0 - \lambda\beta.$$

Q принадлежи на g, следователно

$$l(x_1, y_1) = 0,$$
$$\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma = 0,$$
$$\alpha(x_0 - \lambda\alpha) + \beta(y_0 - \lambda\beta) + \gamma = 0,$$

т.е. $-\lambda(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma) = 0$. $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ и $\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = l(x_0, y_0)$, следователно $\lambda = l(x_0, y_0)$. Така получихме

$$d(P,g) = |\overrightarrow{PQ}| = |\lambda n| = |\lambda||n| = |\lambda| = |l(x_0, y_0)|.$$

Числото $\delta(P,g) = l(x_0, y_0)$ се нарича ориентирано разстояние от т.P до l по отношение на нормалния вектор n. Тъй като $\delta(P,g) = l(x_0, y_0) = \lambda$, където $\lambda : \overrightarrow{QP} = \lambda n$, то $\delta(P,g) > 0$.
$\delta(P,g) > 0$, когато P е в полуравнината, към която сочи n.
$\delta(P,g) < 0$, когато P е в другата полуравнина.

Дефиниция.3: Под ъгъл $\nless (l_1, l_2)$ между две прави l_1 и l_2 се разбира по-малкия от двата ъгъла, които правите сключват.
Нека N_1 и N_2 са нормалните вектори към правите l_1 и l_2. Ако $\nless (N_1, N_2) \leqslant \pi/2$, то $\nless (l_1, l_2) = \nless (N_1, N_2)$. Ако $nless(N_1, N_2) \geqslant \pi/2$, то $\nless (l_1, l_2) = \pi - \nless (N_1, N_2)$. Следователно $\cos \nless (l_1, l_2) = |\cos \nless (N_1, N_2)|$.
Ако $N_1(\alpha_1, \beta_1)$ и $N_2(\alpha_2, \beta_2)$, то тогава $\cos \nless (N_1, N_2) = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2$. От тук следва, че $\nless (l_1, l_2) = \arccos|\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2|$.